Chapitre 7
Séries entières

Exercice 1 : Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

$$(i)\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2}{3^n}z^n,\qquad (ii)\ \sum_{n\geqslant 0}e^{-n^2}z^n,\qquad (iii)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)}{n^2}z^{2n},$$

$$(iv)\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{n^n}{n!}z^{3n},\qquad (v)\ \sum_{n\geqslant 0}n!z^n,\qquad (vi)\ \sum_{n\geqslant 0}\binom{2n}{n}z^{4n},$$

$$(vii)\ \sum_{n\geqslant 0}(2+in)z^n,\qquad (viii)\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{n+i}{2+in}z^{2n},\qquad (ix)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{(1+i)^n z^{3n}}{n2^n},$$

$$(x)\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{(3n)!}{(n!)^3}z^{3n},\qquad (xi)\ \sum_{n\geqslant 0}z^{n^2},\qquad (xii)\ \sum_{n\geqslant 0}z^{n!}.$$

Exercice 2 : On note

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}n^{(-1)^n}x^n.$$

En encadrant $n^{(-1)^n}$ pour $n\in\mathbb{N}$, déterminer le rayon de convergence de S.

Exercice 3 : On considère la fonction

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\begin{cases}\dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si}\quad x\neq 0\\ 1 & \text{si}\quad x=0.\end{cases}$$

Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Montrer que la fonction $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définie par $x\mapsto\dfrac{e^x-1}{x}$ se prolonge à $\mathbb{R}$ en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice 5 : Soit $a>0$. Calculer le développement en série entière des fonctions suivantes et préciser leur rayon de convergence.

$$(i)\ a^x,\quad (ii)\ e^{a+x},\quad (iii)\ \ln(a+x),\quad (iv)\ \frac{1}{a-x}.$$

Exercice 6 : Calculer le développement en série entière des fonctions suivantes et préciser leur rayon de convergence.

$$(i)\ e^x\cos(x),\quad (ii)\ \sin(x)\cos(x),\quad (iii)\ \sin^3(x),\quad (iv)\ \ln(x^2-3x+2),$$

$$(v)\ \frac{1+x}{1-x},\quad (vi)\ \frac{1}{x^2+5x+6},\quad (vii)\ \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\quad (viii)\ \ln(x^2+x+1).$$

Exercice 7 : On note $j=\exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right)$.

1. Calculer $1+j^n+j^{2n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
2. Calculer le développement en série entière de $x\mapsto e^x+e^{jx}+e^{j^2x}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!}$.

Exercice 8 : Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 e^{t^2}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)n!}$.

Exercice 9 : Nous allons développer la fonction Arctan en série entière.

1. Démontrer que

$$\forall x\in]-1,1[,\quad \mathrm{Arctan}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

2. En déduire $\mathrm{Arctan}^{(n)}(0)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 10 : On souhaite calculer le développement en série entière de Arcsin.

1. Démontrer que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} x^n.$$

2. En déduire le développement en série entière de Arcsin et préciser son rayon de convergence.
3. Démontrer que l'on a

$$\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{16^n(2n+1)}\binom{2n}{n}.$$

Exercice 11 : On souhaite étudier la série entière

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n \quad \text{avec} \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Démontrer que $1 \leqslant H_n \leqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire le rayon de convergence R de S.
3. Calculer $(1-x)S(x)$ pour $x \in]-R,R[$.
4. En déduire une expression de $S(x)$ sur $]-R,R[$.

Exercice 12 : Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} x^n.$$

1. Avec une majoration, montrer que le rayon de convergence de S est $+\infty$.
2. Déterminer une expression de $S(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 13 : Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes, puis les exprimer avec des fonctions usuelles.

$$(i)\ \sum_{n\geqslant 0} \frac{n-1}{n!}x^n, \qquad (ii)\ \sum_{n\geqslant 0} \frac{n+2}{n+1}x^n, \qquad (iii)\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}x^{2n},$$

$$(iv)\ \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}, \qquad (v)\ \sum_{n\geqslant 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}, \qquad (vi)\ \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1},$$

$$(vii)\ \sum_{n\geqslant 0} n^2 x^n, \qquad (viii)\ \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+1}{n+1}x^n, \qquad (ix)\ \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3}{n!}x^n.$$

Exercice 14 : On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

1. Montrer que la fonction f est impaire.
2. Montrer que $f(0) = 0$ et que f est solution de (E) : $y' = xy + 1$.
3. Pour $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on note

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}.$$

En substituant h dans (E), montrer que l'on peut choisir les coefficients a_n tels que h soit solution de (E).

4. Déduire des questions précédentes que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$